

Alicja Jarzębska
(Kraków)

LICZBY I MUZYKA. DWIE IDEE „JEDNOŚCI W WIELOŚCI” W TEORII MUZYKI

Przekonanie, że muzyka utożsamiana z różnego typu dziełem muzycznym jest przede wszystkim jakimś uporządkowaniem dźwięków, tj. jednością w wielości, którą można wyrazić przez relacje liczbowe, podzielali wprawdzie zarówno teoretycy muzyki dawnej, jak i teoretycy oraz kompozytorzy dwudziestowiecznej muzyki awangardowej (tzw. dodekafonicznej czy serialnej). Ale jedni łączyli ją z ideą piękna i traktowali muzykę jako wiedzę o harmonijnym zestawianiu dźwięków, na wzór istniejącej we wszechświecie harmonii uwydatnianej przez pitagorejsko-platońską zasadę proporcji, drudzy zaś akcentowali logikę relacji między znakami muzycznej notacji, traktowanymi zwykle jako matematyczny zbiór jakichś elementów. Zgodnie z ideologią postępu i nowatorstwa w sztuce, teoretycy muzycznej awangardy negowali potrzebę zmysłowego piękna, ale w swych rozważaniach teoretycznych sugerowali związek komponowanej muzyki z uporządkowanym szeregiem liczb łączonych ze znakami muzycznej notacji. Dlatego paradoksem wydaje się fakt, iż na związek muzyki z ideą jedności w wielości, wyrażanej przez liczby i pojęcia matematyczne, powoływali się zarówno teoretycy muzyki dawnej, muzyki dającej przyjemne dla ucha wrażenie zgodnego współbrzmienia dźwięków i wyrazistych rytmów, jak i muzyki awangardowej, pełnej rozmaitych dysonansów i szmerów, słowem muzyki często „nieprzyjemnej” w odbiorze i zwykle z trudem akceptowanej przez melomanów. Niemal do schyłku XVII wieku fundamentem rozważań teoretycznych na temat muzyki była jedność w wielości związana z ideą piękna i pitagorejsko-platońską zasadą proporcji. Natomiast nowożytną myśl teoretyczną, zwłaszcza dwudziestowieczną, zdominowała idea jedności w wielości odwołująca się do filozoficznej koncepcji „materii organicznej” oraz aksjomatycznej metody dedukcyjnej¹.

Podstawą dawnej teorii muzyki było założenie, iż twórczość muzyczna jest zgodnie z określeniem św. Augustyna *scientia bene molutanti*. W traktacie *De musica* (VI, 12, 38; VI, 10, 28) św. Augustyn pisał, iż „rzeczy piękne podobają się nam dzięki zawartej

¹ Rozróżnienie materii na organiczną i nieorganiczną zaproponował hrabia George Leclerc de Buffon (1707–1788) w swej *Histoire naturelle* z 1749 roku. U schyłku XVIII wieku ideę organicznej prasuubstancji wykorzystał m.in. Johann Wolfgang Goethe; w jego *Versuch die Metamorphose der Pflanzen zu erklären* (z 1790 roku, opublikowanej w roku 1802) pojawia się pojęcie prarośliny (*Urpflanz*), które wywarło duży wpływ na nowożytną teorię koheretnego dzieła muzycznego, a zwłaszcza na dwudziestowiecznych teoretyków muzyki dodekafonicznej i serialnej.

w nich liczbie, której celem (...) jest równość. (...) Równość i podobieństwo zaś idą w parze ze zjawiskiem rytmu. (...) miła jest (...) równość rytmów na przestrzeni czasu”. Powszechnie znana jest jego sentencja, iż „podoba mi się tylko piękno, w pięknie zaś kształty, w kształtach proporcje, a w proporcjach – liczby” (*De ordine* II, 15, 42). Św. Augustyn nawiązał zatem do liczbowej koncepcji piękna, która pojawiła się w myśli greckiej (u Pitagorasa, Platona, Arystotelesa), głoszącej, iż „Ład i proporcja są piękne i pożyteczne”. W starożytności piękno i doskonałość danej rzeczy wyrażano za pomocą proporcji liczbowej, która pozwalając na sporą liczbę kombinacji, daje się sprowadzić do podstawowej zasady: jedności w wielości. Estetyka proporcji wkroczyła do średniowiecza jako dogmat niewymagający weryfikacji, ponieważ wiedza o proporcjach została już wcześniej zweryfikowana przez antyk.

Jak wiadomo, filozofię proporcji w pitagorejskiej postaci przekazał średniowieczny Boecjusz (480–525), rozwijając koncepcję stosunków proporcjonalnych w zakresie współbrzmienia różnych dźwięków i odnosząc ją do harmonii kosmosu. Zaliczył on muzykę do szlachejnych *artes liberales*, i to do *quadrivium*; utożsamiał ją bowiem z tym, co dziś nazywa się teorią muzyki. Za prawdziwego muzyka uważano wówczas nie kompozytora czy wirtuoza, lecz teoretyka posiadającego wiedzę o „harmonijnym zestawianiu dźwięków” zgodnym z zasadą proporcji. Średniowieczną teorię konsonansowych współbrzmień, która odwoływała się do pitagorejskiej zasady proporcji preferującej stosunki tylko między pierwszymi czterema liczbami całkowitymi, ilustruje rycina zamieszczona w dziele Franchino Gafurio *De harmonia musicorum instrumentorum* (Milano 1518)². Pitagorejskie relacje liczbowe skojarzone z harmonią dźwięków uwiecznił także Rafael w słynnym fresku zwanym *Szkola Ateńska*, gdzie zostały wymalowane na tabliczce przed postacią Pitagorasa. Jak wiadomo, teoria piękna oparta na matematycznych, wymiernych proporcjach małych liczb całkowitych, stała się w epoce humanizmu wspólnym mianownikiem dla teorii muzyki, architektury, rzeźby i malarstwa. Terminologii muzycznej dotyczącej interwałów używali m.in. Andrea Palladio w swym dziele *Quattro libri dell'architettura* (1570) i Giampaolo Lomazzo, który pisał o stosunkach przestrzennych w dziełach plastyki w *Trattato dell'arte della pittura* (1584).

W połowie XVI wieku wenecki teoretyk muzyki Gioseffo Zarlino z zasadą proporcji skojarzył także innego rodzaju harmonijne zestrojenie trzech dźwięków, interpretowane jako podział kwinty (2:3) średnią arytmetyczną na tercję wielką (4:5) i tercję małą (5:6), oraz średnią harmoniczną na tercję małą ($10:12 = 5:6$) i tercję wielką ($12:15 = 4:5$). Rozwój muzyki wielogłosowej, w której wykorzystywano przyjemne dla ucha współbrzmienia tercji, skłonił bowiem teoretyków do poszerzenia szeregu liczb stosowanych do pitagorejskiej zasady proporcji. Dlatego też Zarlino w swej teorii konsonansowych współbrzmień odwoływał się już do proporcji między liczbami od 1 do 6 (*senarius*), wskazując na szczególne właściwości liczby 6, jako tzw. liczby doskonałej.

W XVIII stuleciu teoretycy muzyki zaadaptowali nowożytną koncepcję jedności w wielości, związaną z ideą pierwszej przyczyny i aksjomatyczną metodą dedukcyjną. Na przykład w teorii muzyki Jeana Philippe’a Rameau (1683–1764), inspirowanej filozofią Kartezjusza i mechaniką Newtona, podstawowym zagadnieniem nie był już

² Obok trzech piszczałek i trzech odcinków liniowych umieszczone są liczby 3, 4, 6 oraz cyrkiel, które symbolizują związek harmonii muzycznej z arytmetyką i geometrią. Stosunek między tymi liczbami odpowiada oktawie ($3:6 = 1:2$) podzielonej średnią harmoniczną na kwartę ($3:4$) i kwintę ($4:6 = 2:3$).

fenomen paralelizmu harmonijnych wrażeń zmysłowych i matematycznej zasady proporcji, ale problem określenia logicznego związku między różnorodnością zanotowanych w partyturze wysokości dźwięków, a ich teoretyczną „pierwszą przyczyną”. Swoją teorię muzycznej harmonii Rameau oparł bowiem na pojęciu *centre harmonique* i aksjomacie o tożsamości zanotowanych współbrzmień interpretowanych jako „przewroty” tzw. akordu podstawowego. Akceptując zasadę „pierwszej przyczyny” oraz permutacji elementów w ramach danej całości (akordu), był on pionierem dwudziestowiecznej teorii muzyki jako teorii związku między różnymi wysokościami dźwięków, teorii opartej na aksjomatach i matematycznych regułach zaczerpniętych z kombinatoryki i teorii zbiorów.

Wyrazistym przejawem zaadaptowania do teorii muzyki nowożytnej idei jedności w wielości jest dwudziestowieczna koncepcja relacji serialnych, w której podstawową kategorią jest seria, zbiór (niem. *Grundgestalt*, ang. *set*). W pierwszej połowie XX stulecia teoretycy tzw. nowej muzyki kojarzyli proponowane przez siebie teoretyczne pojęcie „jedności” z filozoficzną koncepcją „materii organicznej” i prorośliny Goethego. Arnold Schönberg na przykład, sugerował, iż w teorii muzycznej kompozycji odpowiednikiem owej filozoficznej „materii organicznej” może być *Grundgestalt*, tzn. wybrany przez kompozytora szereg abstrakcyjnych klas wysokości dźwięku, z którego można „generować” inne szeregi klas wysokości uznane za tożsame ze względu na relację symetrii lustrzanej lub analogiczną strukturę klas interwałowych. Idea jedności w wielości, skojarzona została zatem – w jego ujęciu – z wizualnym wrazeniem analogii figur geometrycznych wzajemnie symetrycznych. Dlatego też koncepcję *Grundgestalt* ilustrowano rysunkami figur, które miały sugerować tożsamość rozmaitych szeregów klas wysokości dźwięku określanych jako wersja zasadnicza, retrogradalna, inwersja i inwersja w ruchu wstecznym. Owe szeregi klas wysokości dźwięku mogły determinować notację zarówno linearnych, jak i wertykalnych układów dźwiękowych.

W drugiej połowie XX stulecia amerykańscy teoretycy muzyki posttonalnej odwoływali się do symboliki i pojęć z matematycznej teorii zbiorów. Allen Forte na przykład, w książce *The Structure of Atonal Music* (1973) zaprezentował teorię muzyki jako systemu „kompleksów serialnych”, w którym podstawowym pojęciem jest *prime set* kojarzony ze zbiorem od 3 do 9 klas wysokości dźwięku (określanych liczbami od 0 do 11). Zgodnie z tą koncepcją, koherencja utworu muzycznego uwydatniana jest przez redukcję zanotowanych w partyturze wysokości dźwięków (traktowanych jako zbiory liczb) do jednej lub kilku *prime sets*. Redukcja ta uwzględnia relacje podobieństwa między szeregami liczb, odwołując się do matematycznej teorii zbiorów. Według teorii Fortego, znaki partytury oznaczające wysokość dźwięku traktowane są bowiem jako liczby będące elementami jakiegoś zbioru liczb. Termin „podobieństwo” odnosi się zatem nie do efektu audytywnego podobieństwa postaci brzmieniowych, ale do abstrakcyjnego pozazmysłowego podobieństwa między grupami liczb, podobieństwa łączonego m.in. z takimi operacjami, jak rotacja czy permutacja elementów danego zbioru.

W latach powojennych muzycy w rozmaity sposób akcentowali związek notowanych dźwięków z liczbami. Na przykład francuski kompozytor Olivier Messiaen w swym utworze z 1948 roku *Turangalila* (na duży zespół orkiestrowy) podporządkował notację wartości rytmicznych rozmaitym szeregom liczbowym, wykazującym swoiste uporządkowanie w ramach danego zbioru. Punktem wyjścia w konstruowaniu

rytmiki był ciąg liczbowy od 1 do 16³. W środkowym fragmencie VII części tego utworu (od numeru 7–8 partytury) notacja ośmiu struktur rytmicznych (realizowanych równocześnie przez instrumenty perkusyjne i kontrabasy) podporządkowana jest następującym szeregom liczbowym⁴.

Numer ciągu liczb	Ciągi liczb determinujących notację wartości rytmicznych (1 = szesnastka)	Instrumenty realizujące wartości rytmiczne
I	1 1 1 1 1 1 1 1 itd.	czelesta i flety
II	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	trójkąt
III	16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	wielki bęben
IV	8 9; 7 10; 6 11; 5 12; 4 13; 3 14; 2 15; 1 16;	tam-tam
V	3 16; 3 15; 3 14; 3 13; 3 12; 3 11; 3 10; 3 9; 3 8;	tempelbloki i marakasy
VI	4 12; 4 11; 4 10; 4 9; 4 8; 4 7; 4 6; 4 5; 4 4; 4 3;	kontrabasy
VII	7 1 9; 6 1 10; 5 1 11; 4 1 12; 3 1 13; 2 1 14; 1 1 15;	mały talerz
VIII	1 7 8; 2 6 8; 3 5 8; 4 4 8; 5 3 8; 6 2 8; 7 1 8;	talerz chiński

Oliver Messiaen, *Turangilila* (cz. VII, nr 7–8).

Prekompozycyjne szeregi liczbowe determinujące strukturę rytmiczną układów dźwiękowych realizowanych równocześnie przez różne instrumenty.

W układzie owych liczb zwraca uwagę naprzemienne łączenie elementów dwu szeregów liczb naturalnych: jednego o wzrastających wartościach liczbowych (...9, 10, 11...) i drugiego o malejących wartościach liczbowych (...8, 7, 6...) (por. szereg IV). Kompozytor wykorzystał także następstwo dwu- lub trzelementowych grup liczbowych, w których oprócz elementów zmiennych (zgodnych ze wspomnianym wyżej porządkiem) pojawia się element stały, tzn. ta sama liczba (por. szeregi V, VI, VII, VIII).

Niemal 10 lat później włoski kompozytor Luigi Nono skomponował utwór wokálně-instrumentalny pt. *Il canto sospeso* (1956), w którym wykorzystał ciąg liczb Fibonacciego do określenia wartości rytmicznych kolejnych dźwięków (w części drugiej, przeznaczonej na chór *a capella*)⁵. Nono wybrał 6 liczb tworzących szereg Fibonacciego (1, 2, 3, 5, 8, 13) i ich lustrzane odbicie. W jego partyturze wartości rytmiczne ko-

³ W partyturze liczbie 1 odpowiada wartość rytmiczna – szesnastka, a kolejnym elementem tego ciągu – jej wielokrotności; zatem liczba 4 – notowana jest jako ćwierćnuta, 8 – jako półnuta, a 16 – jako cała nuta.

⁴ Por. M. Woźna-Stankiewicz, *Synteza rytmiczna Oliviera Messiaena* [w:] *Affetti musicologici*, Kraków – Musica Iagellonica, Kraków 1999, s. 485–495.

⁵ Jak wiadomo, żyjący w XIII wieku matematyk Leonardo da Pisa, zwany Fibonaccim (1194–1251), wymyślił ciąg liczb, w którym każda następna cyfra jest sumą dwu poprzednich. Matematycy stwierdzili, że liczby Fibonacciego są fascynujące i piękne ze względu na nie same (stosunek dwu kolejnych cyfr tego ciągu coraz bardziej zbliża się do tzw. złotej liczby, najbardziej niewymiernej). Biolodzy zaś zauważyli, że liczby szeregu Fibonacciego odzwierciedlają prawidłowości natury, ponieważ u większości kwiatów liczba płatków jest jedną z cyfr występujących w tym dziwnym ciągu: 3 (lilie), 5 (jaskry), 8 (ostródki), 13 (nagietki), 21 (astry), 34, 55, 89 (stokrotki) (por. I. Steward, *Liczby natury*, Warszawa 1996).

lejších dźwięków serii są graficznym zilustrowaniem liczb uzyskanych przez mnożenie kolejnych sześciu liczb ciągu Fibonacciego i czterech liczb ciągu harmonicznego ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$). Nono założył, iż zarówno liczby ciągu harmonicznego, jak i szereg liczb Fibonacciego są godne uwagi ze względu na ich „piękno matematyczne”. Czas trwania kolejnych dźwięków 12-tonowej serii podporządkował zatem liczbie uzyskanej w wyniku mnożenia kolejnych liczb jednego i drugiego szeregu (liczba 1 notowana jest jako ćwierćnuta trwająca ok. 1 sekundy)⁶.

Innego typu związek między liczbami a muzyką zaproponował Pierre Boulez, francuski kompozytor awangardowy, teoretyk i matematyk (ukończył studia matematyczne) w utworze na dwa fortepiany zatytułowanym *Struktury* (1952). Mianowicie w notacji tej partytury z dwunastoma liczbami ciągu arytmetycznego skojarzył dwanaście stopni dynamicznych (od *pppp* do *ffff*), a także wybrane następstwo dwunastu klas wysokości.

<i>pppp</i>	<i>ppp</i>	<i>pp</i>	<i>p</i>	<i>quasi p</i>	<i>mp</i>	<i>mf</i>	<i>quasi f</i>	<i>f</i>	<i>ff</i>	<i>fff</i>	<i>ffff</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

<i>es</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>as</i>	<i>g</i>	<i>fis</i>	<i>e</i>	<i>cis</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>h</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

W partii pierwszego fortepianu inwersyjno-transpozycyjne warianty owej *Grundgestalt* prezentowane są 24 razy w rozmaitej dynamice. Kolejność notowanych znaków dynamicznych jest zdeterminowana przez dwa, dwunastoelementowe szeregi liczb naturalnych, których struktura ma znamiona symetrii zwierciadlanej⁷.

12, 7, 7, 11, 11, 5,	5, 11, 11, 7, 7, 12
2, 3, 1, 6, 9, 7	7, 9, 6, 1, 3, 2

Tak fetyszyzowana przez awangardę muzyczną liczba 12 została w specyficzny sposób uwydatniona w widowisku muzycznym Igora Strawińskiego, w jego balecie *Agon* (1953–1957)⁸. Utwór ten napisany został na zespół 12 tancerzy (składający się z 8 kobiet i 4 mężczyzn) i podzielony na 12 fragmentów. Widowisko to nie ma libretta sugerującego jakąś fabułę; jest to tzw. balet abstrakcyjny. W logicznej „narracji” tego widowiska istotną rolę odgrywa układ liczb, którym podporządkowana została liczba tancerzy i tancerek występujących w kolejnych fragmentach utworu. Kompozytor odwołuje się zatem nie do jakichś skojarzeń literackich, tzn. emocjonalno-wizualnych, ale do „matematycznej” wyobraźni potencjalnych odbiorców, zdolnych uchwycić swoistą logikę proponowanych relacji ilościowych i jakościowych. Strawiński precyzyjnie rozplanował bowiem ilościowy udział tancerzy i tancerek w kolejnych fragmentach.

Myśl teoretyczną i twórczość kompozytorów muzyki dodekafonicznej i serialnej

⁶ Por. A. Jarzębska, *Idee relacji serialnych*, Kraków – Musica Iagellonica, Kraków 1995.

⁷ W autorskim komentarzu dotyczącym tego utworu kompozytor poinformował, iż owe dwa szeregi 12 liczb uzyskał w wyniku nałożenia regularnej figury geometrycznej na diagram ilustrujący za pomocą szeregów liczbowych następstwo klas wysokości w jedenastu transpozycyjnych wariantach *Grundgestalt*. A. Jarzębska, *ibidem*.

⁸ Grecki termin *agon* oznacza zawody, zapasy, popisy, np. gimnastyczne. W utworze Strawińskiego pojawiają się nazwy siedemnastowiecznych tańców.

zdominowała zatem nowożytna idea prekompozycyjnego szeregu liczb determinującego notację klas wysokości dźwięku lub wartości rytmicznych. Podsumowując swą teorię relacji serialnych, Pierre Boulez stwierdził: „Zdefiniowałem doskonale zorganizowany i logicznie zwarty muzyczny świat”. Mottem jego książki *Penser la musique aujourd'hui* (1963) jest wypowiedź matematyka Louisa Rougiera (1889–1982):

„Aksjomatyczna metoda pozwala na konstruowanie czysto formalnych teorii, które są szkicami relacji i wzorami dedukcji. Tak więc jedna i ta sama forma relacji może być stosowana do różnorodnego materiału, do grup obiektów o odmiennej naturze, pod jednym tylko warunkiem, że między tymi obiektami będą te same relacje, które istnieją między nieokreślonymi symbolami tej teorii”.

Zgodnie z dwudziestowieczną teorią notacji muzyki serialnej, przejawem nowożytnej jedności w wielości jest zatem zbiór liczb, do którego można zredukować znaki partytury określające wysokość dźwięków lub ich wartość rytmiczną. Ale w tym ujęciu pojęcie podobieństwa nie jest odnoszone do audytywnego wrażenia podobieństwa brzmienia, ale do abstrakcyjnych zbiorów liczb traktowanych jako symbole znaków partytury.

Jednak dwudziestowieczni kompozytorzy, okreśłani mianem klasyków współczesności, w swych wypowiedziach o muzyce łączonej z metaforą architektury, nadal nawiązywali do owej starożytnej koncepcji jedności w wielości, związanej z ideą piękna, proporcjonalnością i zmysłowo uchwytną harmonią układu podobnych i różnych postaci brzmieniowych. Na przykład Igor Strawiński uważał, iż kompozytor, podobnie jak matematyk, intuicyjnie szuka pięknych konstrukcji. W swych rozmowach z Robertem Craftem cytował wypowiedź amerykańskiego matematyka Harolda Marstona Morse'a (autora prac z rachunku wariacyjnego i topologii), iż w matematyce „intuicyjne rozpoznanie piękna musi grać ważną rolę. Z nieskończonej liczby wzorów matematyk wybiera jakiś układ ze względu na jego piękno i ściąga je na ziemię”⁹.

⁹ I. Stravinsky, R. Craft, *Expositions and Developments*, Londyn 1962, s. 101.